早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

On Leopoldt's conjecture for non-abelian extensions

(非可換拡大のレオポルト予想について)

申 請 者

氏 名	久保寺	範和

専攻・研究指導 (課程内のみ)	数理科学専攻　整数論研究

2004 年 10 月

研究の背景

1630年代、フェルマーがディォファントス著「算術」の余白に「2より大きい自然数nに対し、$x^n + y^n = z^n$を満たす自然数x, y, zは存在しない」と記述した。所謂フェルマーの定理である。クンマーは「イデアル類群」を調べることにより、フェルマーの定理の解決に取り組んだ。以後、イデアル類群およびその位数である類数を調べることは整数論の主要な研究テーマとなっている。現在、様々な類数公式が得られている。

本論文では、類数公式に関する予想である Leopoldt 予想と Greenberg 予想が成立する体の無限族の構成し、Leopoldt 予想が成立するための十分条件を与えている。

研究概要

1950年代、H.W.Leopoldt はp進L関数の研究を始めた。H.W.Leopoldt は久保田富雄と共に、p進L関数を構成し、p進類数公式を得た。これに関連してp進単数基準が0ではないであろうという、Leopoldt 予想を得た。Leopoldt 予想は様々に言い換えがなされており、例えば代数体kと素数pに対する Leopoldt 予想は次のように言い換えられる：E_kを代数体kの単数群とし、正の有理整数cに対して$E_k(p^c) = \{\varepsilon \in E_k | \varepsilon \equiv 1 \bmod p^c\}$とする。このとき任意の正の有理整数$a$に対して、$E_k(p^b) \subseteq E_k^{p^a}$となる有理整数$b$が存在する。

岩澤健吉は、Leopoldt 予想は素イデアルの分岐次数の条件がついたk上の有限次 abel 拡大体の存在と同値になることを示している。このような体の存在は類対論では示せず、整数論の重要な問題の1つとなっている。

Leopoldt 予想は、Ax と Brumer により有理数体上 abel 的な拡大体については解決された。現在まで Leopoldt 予想については、様々な研究者の結果があるが、有理数体上 non-abel な拡大体の場合について大きな進歩は見られない。本論文では、有理数体上 non-abel な拡大体で、Leopoldt 予想を満たす無限族を構成し、また Leopoldt 予想が成立するための十分条件とその十分条件を満たす有理数体上 non-abel な拡大体を与えた。

また岩澤健吉は、有限次代数体kの無限次ガロア拡大体でガロア群がp進整数環$\mathbb{Z}_p$の加法群と同型となる$\mathbb{Z}_p$拡大についての次の類数公式を得た：

$\mathbb{Z}_p$拡大k_∞/kのp^n次中間体k_nのイデアル類群のpシロー部分群$A(k_n)$の位数に対し、nが十分大きいとき$\#A(k_n) = p^{\lambda(k_\infty/k)n+\mu(k_\infty/k)p^n+\nu(k_\infty/k)}$となる。ただし、$\lambda(k_\infty/k)$、$\mu(k_\infty/k)$、$\nu(k_\infty/k)$は岩澤不変量と呼ばれる整数である。

上記の類数公式の$\lambda(k_\infty/k)$および$\mu(k_\infty/k)$不変量は総実な cyclotomic$\mathbb{Z}_p$拡大に対して共に0であろうという Greenberg 予想がある。Greenberg 予想は、２次体

の場合においても解決されておらず、有理数体上 non-abel な拡大体で Greenberg 予想を満たす例はほとんど知られていない。本論文では、Greenberg 予想を満たす non-abel なガロア拡大体の無限族も構成した。

1. Greenberg's conjecture and Leopoldt's conjecture

本章では、3 以上の素数 p に対して、分岐条件のついた埋め込み問題を解くことにより、ガロア群が位数 p^3 の非可換群 $E =< a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = 1, ba = abc, bc = cb, ac = ca >$ と同型になる拡大体で、Greenberg 予想または Leopoldt 予想を満たすガロア拡大体の無限族を構成している。

以下の定理は、3 以上の素数 p に対しガロア群が E と同型となる有理数体上のガロア拡大体で、Greenberg 予想が成り立つような例を構成している。

有理数体上素数冪次の non-able なガロア拡大体で Greenberg 予想を満たすような例は、小松によるガロア群が四元数群となる有理数体上のガロア拡大体を具体的に構成したものがある。これに対し本論文では、3 以上の素数冪位数の群をガロア群とする拡大体の無限族で、その cyclotomic$\mathbb{Z}_p$ 拡大が Greenberg 予想を満たすものを与えている。また上記の体の無限族は、分岐条件のついた埋め込み問題の結果を使用して初めて得られた。

定理 1. p を奇素数とし、l を $l \equiv 1 \pmod{p^2}$ かつ p が $\mod l$ で p 乗数とはならない素数とする。$\mathbb{Q}_{(1)}$ を $\mathbb{Q}$ の *cyclotomic*$\mathbb{Z}_p$ 拡大の *1st layer* とする。また $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ の部分体で $\mathbb{Q}$ 上 p 次巡回拡大となるものが唯一存在し、これを $k(l)$ と記す。（ただし、ζ_l は *1* の原始 l 乗根である。）$K = \mathbb{Q}_{(1)} \cdot k(l)$ とする。このとき次の条件（＊）をみたすガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ が存在する。

（＊） ・$K \subseteq L$, $Gal(L/\mathbb{Q}) \simeq E$
　　　 ・L/K で分岐する素イデアルは p の上のもののみ

この L に対して $\lambda_p(L) = \mu_p(L) = \nu_p(L) = 0$ となる。すなわち *Greenberg* 予想が成立する。

さらに奇素数 p に対して、上記をみたす l は無数に存在するので、ガロア群が E と同型で岩澤不変量が *0* となるような有理数体上のガロア拡大体は無数に存在する。

また、non-abel な拡大体に関する Leopoldt 予想は、三宅克哉の研究結果の他、大きな進歩は見られない。以下の定理では、3 以上の素数 p に対し、ある虚 2 次体上のガロア群が E と同型となるガロア拡大で、Leopoldt 予想が成り立つような拡大体の無限族を構成している。さらに、構成方法に埋め込み問題を使用しており、このような構成方法による Leopoldt 予想を満たす体の例は本論文が初めてである。

定理 2.　k を虚二次体とし、h_k を k の類数とする。p を以下の条件の１つを満たす素数とする。
(i) $p > 3$ かつ $p \nmid h_k$
(ii) $p = 3$、$p \nmid h_k$ かつ、p は k で不分岐
$k_{(1)}$*(resp.* $k^{an}_{(1)}$*)* を k の *cyclotomic(resp. anti-cyclotomic)* $\mathbb{Z}_p$ 拡大の *1st layer* とする。このとき以下の条件 $(*)$ を満たすガロア拡大体 M/k が存在する。
$(*)$ $Gal(M/k) \simeq E$ *and* $K \subseteq M$、かつ、M/K で分岐する素イデアルは p の上のもののみである。
このM と p に対し、*Leopoldt* 予想が成立する。

2. A sufficient condition for Leopoldt's conjecture

本章では、Leopoldt 予想を満たす十分条件を示している。その条件を満たす有理数体上 non-abel な拡大体の例を与えている。Leopoldt 予想は、有理数体上 abel な拡大体の場合に示されて以後、大きな進歩は見られない。現在、多くの研究者は、Leopoldt 予想を示すのには新たなアイデアが必要と考えている。本論文では素イデアルの分岐次数の条件のついた拡大体を、埋め込み問題を用いて構成することにより、Leopoldt 予想の十分条件を導き出している。埋め込み問題を用いることにより、Leoplodt 予想を満たす条件を示したのは、本論文が初めてである。

定理 3.　p を素数とし、k を１の原始 p 乗根 ζ_p を含む有限次代数体とする。
E_k を k の単数群とする。k の整数環 $\mathcal{O}_k$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して、$E_k(\mathfrak{a}) = \{\varepsilon \in E_k | \varepsilon \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}\}$ とする。
$B_{k,p}(\{\mathfrak{p}\}) = \{\alpha \in k^\times | \alpha\mathcal{O}_k = \mathfrak{a}^p$ となる k のイデアル $\mathfrak{a}$ が存在し、かつ $\alpha \in (k_\mathfrak{p}^\times)^p$ となる。$\}/(k^\times)^p$ とする。ただし、$k_\mathfrak{p}$ は k を $\mathfrak{p}$ によって完備化したものである。
$B_{k,p}(\{\mathfrak{p}\}) = \{1\}$ をみたす k の素イデアル $\mathfrak{p} \mid p$ が存在したとする。このとき、任意の有理整数 $a \geq 0$ に対し、有理整数 $b \geq 0$ が存在して $E_k(\mathfrak{p}^b) \subseteq E_k^{p^a}$ となる。すなわち k と p に関する *Leopoldt* 予想が成立する。

p の上の素イデアルが唯一の場合、上記の定理が成立することは三木博雄によって示されており、定理 3 はその拡張となっている。
また、有理数体上 non-abel な拡大体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{x}, \zeta_3)$　（ただし x は 12 以下の正の有理整数とする）は、定理 3 の条件を満たしており、従って 3 と k に関する Leopoldt 予想が成立する。このように定理の条件は Leopoldt 予想を満たすか否かを判別するのに有用である。

研　究　業　績

種 類 別	題名、　　発表・発行掲載誌名、　　発表・発行年月、　　連名者（申請者含む）
論文	“A sufficient condition for Leopoldt's conjecture”, Journal of Number Theory 111, no.1, 81-85(2005) “Greenberg's conjecture and Leopoldt's conjecture”, Proceedings of Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, volume 76, no.7, 108-110(2000)

研　究　業　績

種 類 別	題名、　　発表・発行掲載誌名、　　発表・発行年月、　　連名者（申請者含む）
講演	“Leopoldt 予想をみたすある non-Galois 拡大体について”, 日本数学会 2003 年度年会　代数学分科会, 2003 年 3 月 25 日 “Leopoldt 予想をみたすある non-Galois 拡大体について”, 2002 年度早稲田大学整数論シンポジウム, 2002 年 3 月 20 日 “ある非可換 l-拡大の Zl-拡大の岩澤不変量について”, 日本数学会 1999 年度秋季総合分科会　代数学分科会, 1999 年 9 月 27 日 以上